ECOLE SPECIALE DES TRAVAUX PUBLICS, DU BATIMENT ET DE L'INDUSTRIE

**CONCOURS COMMUN D'ADMISSION
AUX ECOLES SUPERIEURES
DES TRAVAUX PUBLICS
DU BATIMENT
DE MECANIQUE-ELECTRICITE
DE TOPOGRAPHIE**

SESSION 1992

DEUXIEME INTERROGATION DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

NOTA : *Les cinq sujets sont totalement indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque, sous réserve d'indiquer clairement leur numéro.*
Dans la rédaction des copies, les candidats sont priés de bien vouloir encadrer chacun des résultats correspondant aux éléments encadrés dans les énoncés.
Le symbole "ℓn" signifie "logarithme népérien".

SUJET N°1

Pour tout entier $n \geq 0$ et tout réel $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$, on pose

$$f_n(x) = \frac{\sin^2 nx}{\sin x} \quad , \quad I_n = \int_0^{\pi/2} f_n(t)dt \quad , \quad F_n(x) = \int_x^{\pi/2} f_n(t)dt$$

(1) En réduisant $f_2(x)$, calculer $\boxed{I_2}$.

(2) Simplifier l'expression $f_n(x) - f_{n-1}(x)$, où $n \geq 1$. En déduire la valeur de $\boxed{I_n}$.

(3) Démontrer que l'on a $I_n = A\ \ell n(n) + B + \varepsilon_n$, où $\boxed{A}$ et $\boxed{B}$ sont des constantes à déterminer, la suite (ε_n) tendant vers 0, $n \geq 1$. [On donne $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ell n(n) + C + o(1)$, $n \geq 1$, où (H_n) est la "suite harmonique" et C la "constante d'Euler".]

(4) Pour tout entier $n \geq 0$ et tout réel $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$, on pose

$$\Phi_n(x) = \int_x^{\pi/2} \frac{\cos 2nt}{\sin t}\, dt$$

Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \Phi_n(x)$. [On pourra effectuer une intégration par partie.]

(5) En déduire l'existence et la valeur de $\boxed{g(x)} = \lim_{n \to +\infty} F_n(x)$.

page 234 2/3 . 1992 .

E.S.T.P Deuxième Interrogation

SUJET N°2

Pour tout réel $x > 1$ et tout entier $n \geq 0$, on pose

$$u(x) = \frac{1}{\ell n(x)} \quad , \quad v_n(x) = (-1)^n \, u(x+n).$$

(1) Prouver la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} v_n(x)$. On appellera désormais $f(x)$ sa somme:

$$f(x) = \frac{1}{\ell n(x)} - \frac{1}{\ell n(x+1)} + \frac{1}{\ell n(x+2)} - \ldots$$

(2) Trouver une relation simple entre $f(x)$, $f(x+1)$ et $u(x)$.

(3) Montrer que f admet, pour x tendant vers $+\infty$, une certaine limite $\boxed{\lambda}$ à déterminer.

(4) Montrer que f est strictement décroissante. [On peut regrouper les termes 2 par 2.]

(5) Établir l'existence de $\boxed{D}$, nombre réel positif à préciser, tel que l'on ait l'équivalent asymptotique:

$$f(x) \sim \frac{D}{\ell n(x)} \quad , \quad x \to +\infty \quad .$$

SUJET N°3

On pose $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ pour tout x réel non nul, et $f(0) = 1$.

(1) Démontrer que f est dérivable en 0 , et préciser la valeur de la dérivée $\boxed{f'(0)}$ en ce point.

(2) Prouver que f admet , en $x = 0$, un développement limité à tout ordre n, c'est à dire

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + o(x^n) \quad , \quad x \to 0 \, .$$

[On pourra écrire $f(x) = \frac{1}{g(x)}$, où $g(x) = \frac{e^x - 1}{x}$, $g(0) = 1$.]

Exprimer $\boxed{a_n}$ en fonction de a_0 , a_1 ,..., a_{n-1} , $n \geq 1$.

(3) Montrer que $|a_n| \leq 1$ pour tout $n \geq 0$. En déduire que la série entière $\Sigma a_n x^n$ converge sur un certain intervalle $\boxed{V}$ entourant 0, à préciser. Soit $\phi(x)$ sa somme.

(4) Établir alors que $f(x) = \phi(x)$ sur V. Montrer que f est dérivable à tout ordre en $x = 0$.

(5) P_n et Q_n étant des polynômes, vérifier que, pour $x \neq 0$, la dérivée d'ordre n de f est de la forme

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(e^x) + x \, Q_n(e^x)}{(e^x - 1)^{n+1}} \quad ,$$

Donner $\boxed{P_2(t)}$ et $\boxed{Q_2(t)}$. Prouver enfin que $f^{(n)}(x)$ est bornée sur $[0, +\infty[$.

SUJET N°4

Soit ($\mathcal{E}$) l'équation différentielle $y' = \cos(xy)$. On considère la solution f de ($\mathcal{E}$) telle que $f(0)=0$.
On admet que f est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle admet une dérivée $f^{(n)}(x)$ à tout ordre n en tout point x.

(1) Montrer que $f'(0)=1$, $f''(0)=f'''(0)=f^{(4)}(0)=0$. Calculer $\boxed{f^{(5)}(0)}$.

(2) Démontrer que $f(x) \leq x$ pour tout $x \geq 0$.

(3) Démontrer l'inégalité suivante, valable pour tout u réel:

$$\cos u \geq 1 - \frac{u^2}{2}$$

En déduire l'existence d'un réel $\boxed{A}$ strictement positif , à préciser, tel que, pour tout $x \geq 0$:

$$f(x) \geq x - A\,x^5 .$$

(4) Pareillement, déterminer $\boxed{B}$ tel que, pour tout $x \geq 0$:

$$f(x) \leq x - A\,x^5 + B\,x^9 .$$

(5) Pour tout $x>0$, montrer que $f(x)<x$ et $f(x)>0$.

SUJET N°5

Pour tout entier $n \geq 0$ et tout réel $x \in [0,1]$, on définit $f_n(x)$, au moyen de la relation suivante:

$$f_n(x) = 2\int_0^x \sqrt{f_{n-1}(t)}\,dt \quad , \quad f_0(x) = 1 .$$

(1) Calculer $\boxed{f_1(x)}$ et $\boxed{f_2(x)}$.

(2) Démontrer que $f_n(x)$ est de la forme $a_n\,x^{b_n}$. Calculer $\boxed{b_n}$ et exprimer $\boxed{a_n}$ en fonction de a_{n-1} .

(3) Prouver que

$$2^n \ln(a_n) = \sum_{k=1}^{n} \left(-2^k \ln\left(1-\frac{1}{2^k}\right)\right) .$$

En déduire l'équivalent asymptotique

$$\ln(a_n) \sim \frac{n}{2^n} .$$

(4) Démontrer que la suite de fonctions $(f_n(x))$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une certaine fonction $\boxed{\phi(x)}$ que l'on précisera.

(5) Cette convergence est-elle uniforme sur $[0,1]$?